Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih

Potrebni uslovi za egzistenciju ekstremnih vrednosti

Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^m$.

Definicija 1 *Ako postoji tačka $x_0 \in E$ tako da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svako $x \in E$, onda kažemo da funkcija f ima u tački x_0* **apsolutni maksimum**. *Vrednost $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in E\}$ je* **najveća vrednost funkcije** *f na skupu E. Analogno se definiše* **apsolutni minimum** *i* **najmanja vrednost funkcije** *f na skupu E.*

Definicija 2 *Funkcija f ima* **lokalni maksimum** *u tački $x_0 \in E$ ako postoji okolina $U_{x_0} \subset E$ tačke x_0 tako da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svako $x \in U_{x_0} \cap E$. Ako je $f(x) < f(x_0)$ za svako $x \in U_{x_0} \cap E$, $x \neq x_0$, tada je x_0 tačka* **strogog lokalnog maksimuma**. *Analogno se definišu* **lokalni minimum** *i* **strogi lokalni minimum**. *Tačke lokalnog maksimuma i lokalnog minimuma funkcije f kraće se nazivaju* **tačkama ekstremnih vrednosti funkcije** *f.*

Teorema 1 *Neka je x_0 tačka lokalnog ekstremuma funkcije f. Ako postoji $f'(x_0)$, onda je $f'(x_0) = 0$. Specijalno, ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, onda je $df(x_0) = 0$.*

Definicija 3 *Unutrašnja tačka x_0 skupa E je* **kritična ili stacionarna tačka funkcije** *f ako je $f'(x_0) = 0$.*

Napomena:

- Stacionarna tačka funkcije u opštem slučaju ne mora biti tačka lokalne ekstremne vrednosti.
- Funkcija može imati ekstremne vrednosti i u tačkama u kojima ne postoje parcijalni izvodi.

Dovoljni uslovi za egzistenciju ekstremnih vrednosti

Teorema 2 (Silvester) *Simetrična kvadratna forma je pozitivno definitna onda i samo onda, ako su svi glavni minori matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kvadratne forme $\phi(x)$ pozitivni.*

Iz teoreme Silvestera sledi da je kvadratna forma negativno definitna onda i samo onda ako je $(-1)^k \det[a_{ij}]_{k\times k} > 0$ za svako $1 \leq k \leq n$, gde se determinante računaju po glavnim minorima matrice kvadratne forme.

Lema 1 *Ako je kvadratna forma $\phi(x) = \phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ određena, onda je*

$$\inf_{x\in S} |\phi(x)| > 0,$$

gde je $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ jedinična sfera.

Teorema 3 *Neka je* $E \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup,* $a \in E$ *stacionarna tačka funkcije* $f \in C^2(E)$*, a* $\left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ *matrica kvadratne forme* ϕ*. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) ako je kvadratna forma ϕ *pozitivno (negativno) definitna, onda funkcija* f *ima strogi lokalni minimum (maksimum) u tački* a*;*

(ii) ako je kvadratna forma neodređena, onda funkcija f *nema lokalnu ekstremnu vrednost u tački* a*.*

Posledica 1 *Neka je funkcija* $f(x, y)$ *definisana u nekoj okolini stacionarne tačke* (x_0, y_0) *u kojoj ima neprekidne prve i druge parcijalne izvode. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) Ako je $f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$*, tada funkcija* f *u tački* (x_0, y_0) *ima strogi lokalni maksimum (minimum) ako je* $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *(* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$*.*

(ii) Ako je $f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 < 0$*, funkcija* f *nema ekstremnu vrednost u tački* (x_0, y_0)*.*

(iii) Ako je $f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 = 0$*, funkcija* f *može, ali ne mora imati ekstremnu vrednost u tački* (x_0, y_0)*.*